ELEKTRODYNAMIK IN KOVARIANTER SCHREIBWEISE

Wir stellen einige allgemeine Betrachtungen zum Feldstärketensor und der Elektrodynamik in kovarianter Schreibeweise an.

[P26] *Verhalten unter Streckungen*
Die Elektrodynamik besitzt keine inhärente Skala. Sie ist daher nicht nur invariant unter der Poincaré-Gruppe, sondern auch unter Streckungen $T_\lambda : x^m \mapsto x'^m = \mathrm{e}^\lambda x^m$. Dies wollen wir hier untersuchen.

(a) Das Viererpotential transformiert gemäß $A'^m(x) = \mathrm{e}^\lambda A^m(\mathrm{e}^{-\lambda}x)$. Wie transformieren dann die kovarianten Komponenten A_m ?
(b) Leiten Sie aus dem Transformationsverhalten für das Viererpotential her, wie die Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ transformieren.
(c) Nutzen Sie die Maxwell-Gleichungen, um das korrekte Transformationsverhalten für die Inhomogenitäten j^m herzuleiten.
(d) Überprüfen Sie, dass die Gesamtladung invariant ist, sich also unter Streckungen nicht ändert.

[P27] *Energie des elektromagnetischen Feldes*
Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch

$$T^{mn} = \eta^{mr} F_{rs} F^{sn} - \frac{1}{4}\eta^{mn} F_{rs} F^{sr} \,. \tag{1}$$

(a) Welche Transformations- und Symmetrieeigenschaften hat T^{mn} ? Berechnen Sie die Spur $T^m{}_m$.
(b) Zeigen Sie, dass $T^{00} = \frac{1}{2}\big(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\big)$ und $T^{0k} = T^{k0} = S_k$ ist, wobei $S_k = \varepsilon_{kij} E^i B^j$ die k-te Komponente des Poynting-Vektors bezeichnet.
(c) Zeigen Sie, dass $\partial_n T^{mn} = -j_n F^{mn} =: -f^m$ ist. Was stellt die Komponente f^0 des so definierten Vierervektors f^m dar?

Hinweis: Für den Feldstärketensor gelten die homogenen Maxwell-Gleichungen, wie in der Vorlesung gezeigt: $\partial^l F^{mn} + \partial^m F^{nl} + \partial^n F^{lm} = 0$.